SIFAT-SIFAT OPERASI ARITMATIKA, DETERMINAN DAN INVERS PADA MATRIKS INTERVAL

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

NURSUKAISIH
10854003938

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2012

SIFAT-SIFAT OPERASI ARITMATIKA,

DETERMINAN DAN INVERS PADA MATRIKS INTERVAL

NURSUKAISIH
10854003938

Tanggal Sidang : 26 Juni 2012
Tanggal Wisuda : 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Matriks interval adalah matriks yang elemen-elemen di dalamnya berupa interval tertutup dengan matriks batas bawah dan matriks batas atas sebagai penyusunnya. Matriks interval dalam operasi aritmatikanya berdasarkan pada operasi aritmatika pada bilangan interval. Sebagaimana pada matriks biasa, matriks interval juga mempunyai beberapa sifat-sifat dalam operasi aritmatika, determinan dan invers. Sifat operasi aritmatika yang berlaku terhadap operasi penjumlahan matriks interval adalah sifat komutatif dan asosiatif, sedangkan pada operasi perkalian matriks interval sifat komutatif dan asosiatif tidak berlaku. Selanjutnya sifat distributif tidak berlaku terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks interval, dan sifat komutatif skalar interval juga tidak berlaku pada perkalian matriks interval. Menentukan determinan pada matriks interval menggunakan metode ekspansi kofaktor langkah-langkah yang harus dilakukan adalah sama seperti matriks biasa, begitu juga dengan menentukan invers pada matriks interval menggunakan adjoin langkah-langkah yang harus dilakukan juga sama seperti matriks biasa.

katakunci: *invers matriks interval, matriks interval, sifat-sifat operasi aritmatika matriks interval*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"SIFAT-SIFAT OPERASI ARITMATIKA, DETERMINAN DAN INVERS PADA MATRIKS INTERVAL"** dengan baik dan selesai tepat pada waktunya. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at-Nya dan selalu dalam lindungan Allah SWT amin. Penulisan Tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Stata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan Tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan arahan, motivasi, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan Tugas akhir ini.

6. Bapak Wartono, M.Sc selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan Tugas akhir ini.
7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan Tugas akhir ini.
8. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008 yang telah banyak memberi semangat dan memotivasi penulis untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi ini.
9. Semua pihak dan para sahabat yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Dengan segala kerendahan hati, penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, untuk itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan. Kepada semua pihak yang membaca skripsi ini, semoga dapat mengambil manfaatnya. Amin.

Pekanbaru, 26 juni 2012

Nursukaisih

DAFTAR ISI

		Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	....	ii
LEMBAR PENGESAHAN	....	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	....	iv
LEMBAR PERNYATAAN	....	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	....	vi
ABSTRAK	....	vii
ABSTRACT	....	viii
KATA PENGANTAR	....	ix
DAFTAR ISI	....	xi
DAFTAR SIMBOL	....	xiii
BAB I PENDAHULUAN		
1.1 Latar Belakang	....	I-1
1.2 Rumusan Masalah	....	I-2
1.3 Tujuan Penelitian	....	I-2
1.4 Batasan Masalah	....	I-3
1.5 Manfaat Penelitian	....	I-3
1.6 Sistematika Penulisan	....	I-3
BAB II LANDASAN TEORI		
2.1 Operasi pada Matriks	....	II-1
2.1.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks	....	II-1
2.1.2 Perkalian Matriks dengan Skalar	....	II-2
2.1.3 Perkalian Matriks dengan Matriks	....	II-3
2.2 Determinan	....	II-4
2.3 Invers Matriks	....	II-6
2.4 Interval	....	II-7
2.5 Operasi Aritmatika pada Interval	....	II-7
2.6 Matriks Interval	....	II-11

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Operasi Aritmatika pada Matriks Interval IV-1

4.1.1 Operasi Penjumlahan pada Matriks Interval IV-1

4.1.1.1 Sifat Komutatif Terhadap Operasi Penjumlahan IV-3

4.1.1.2 Sifat Asosiatif Terhadap Operasi Penjumlahan IV-4

4.1.2 Operasi Pengurangan pada Matriks Interval IV-8

4.1.3 Perkalian Skalar Interval dengan Matriks Interval.. IV-9

4.1.4 Perkalian Matriks Interval dengan Matriks Interval.. IV-11

4.1.4.1 Sifat Komutatif Terhadap Perkalian........ IV-12

4.1.4.2 Sifat Asosiatif Terhadap Perkalian.......... IV-14

4.2 Determinan Matriks Interval IV-21

4.3 Invers Matriks Interval IV-29

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan.. V-1

5.2 Saran V-2

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks merupakan salah satu ilmu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari. Matriks juga dapat diterapkan ke berbagai ilmu pengetahuan lainnya seperti dalam ilmu statistik, fisika, teknik sosial dan ekonomi.

Matriks merupakan susunan segi empat siku-siku yang tersusun dari elemen atau entri. Terdapat beberapa macam matriks diantaranya matriks segitiga atas, matriks diagonal, matriks identitas, matriks interval, dan lain sebagainya. Bentuk dari sebuah matriks sesuai dengan definisi matriks tersebut, seperti matriks segitiga atas yaitu matriks yang elemen dibawah diagonal utamanya bernilai nol, matriks diagonal yaitu matriks yang elemen selain diagonal utamanya bernilai nol, matriks identitas yaitu matriks yang diagonal utamanya bernilai satu selain itu bernilai nol, matriks bujur sangkar yaitu matriks dengan bentuk persegi karena jumlah baris dan kolom yang sama, dan lain sebagainya. (Anton. H, 1998)

Matriks interval yaitu matriks yang elemennya berupa interval, yang memiliki batas atas dan batas bawah. Matriks interval sama halnya dengan matriks biasa, yang memiliki operasi aritmatika untuk menyelesaikan persoalan pada matriks tersebut. Operasi aritmatika pada matriks interval didasarkan pada operasi aritmatika dalam interval. Operasinya dapat berupa penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Berdasarkan operasi aritmatika pada matriks interval maka akan dihasilkan beberapa sifat operasi aritmatika dari matriks interval tersebut.

Konsep operasi aritmatika pada matriks interval pada dasarnya telah banyak dibahas oleh beberapa peneliti sebelumnya, diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Ioana Pasca (2010) yang membahas tentang kondisi formal untuk regularitas pada matriks interval. Selanjutnya penelitian yang dilakukan oleh Devi Safitri (2011), yakni tentang penggunaan aljabar max-plus dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks interval. Kemudian Georg Rex dan Jiri

Rohn (1998) yang meneliti tentang syarat cukup untuk regular dan singular dari matriks interval.

Matriks interval dapat diaplikasikan dalam kehidupan, salah satunya adalah aplikasi ilmu matriks interval dalam sistem jaringan antrean. Salah satu penelitian atas aplikasi matriks interval telah dilakukan oleh Sri Rejeki Puri Wahyu Pramesthi (2010), yang mana dalam penelitiannya menggunakan aljabar max-plus dalam menentukan waktu periodik dalam sistem antrian.

Berdasarkan penelitian-penelitian dan jurnal-jurnal di atas mengenai matriks interval, sehingga penulis tertarik untuk mengulas sebuah jurnal yang ditulis oleh K. Ganesan (2007) yang berjudul Beberapa Sifat dari Matriks Interval. Penelitian yang akan penulis lakukan dalam mengulas jurnal tersebut adalah mengenai pembuktian sifat-sifat operasi aritmatika pada matriks interval, menentukan langkah-langkah untuk mencari nilai determinan dan invers pada matriks interval. Berdasarkan hal tersebut maka penulis mengambil judul **"Sifat-Sifat Operasi Aritmatika, Determinan dan Invers pada Matriks Interval".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Apa sajakah sifat-sifat operasi aritmatika pada matriks interval ?
2. Bagaimana langkah-langkah menentukan nilai determinan pada matriks interval ?
3. Bagaimana langkah-langkah menentukan invers pada matriks interval ?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah maka penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan atau memperoleh sifat-sifat operasi aritmatika pada matriks interval dan menentukan langkah-langkah untuk mencari nilai determinan dan invers pada matriks interval.

1.4 Batasan Masalah

Berdasarkan pada rumusan masalah maka harus dilakukan batasan masalah agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat pada waktunya. Permasalahan pada penelitian ini dibatasi pada:

a. Pembuktian sifat-sifat operasi aritmatika pada matriks interval, yakni dibatasi pada operasi penjumlahan dan operasi perkalian.
b. Menentukan langkah-langkah untuk mencari determinan matriks interval hanya menggunakan metode akspansi kofaktor.
c. Menentukan invers matriks interval hanya menggunakan adjoin.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang bisa diperoleh dari penelitian ini adalah:

1. Penulis mampu menentukan sifat-sifat operasi aritmatika pada matriks interval, mampu menentukan determinan dan invers dari matriks interval dan hal lainnya yang berhubungan dengan matriks interval.
2. Sebagai sarana informasi bagi pembaca dan sebagai bahan referensi bagi pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini mencakup mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini membahas tentang teori-teori yang mendukung dalam menyelesaikan bagian pembahasan masalah. Teori-teori tersebut antara lain yaitu operasi pada matriks, determinan, invers matriks, interval, operasi aritmatika interval dan matriks interval.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi prosedur atau langkah-langkah untuk membuktikan sifat-sifat operasi aritmatik matriks interval dan langkah-langkah mencari nilai determinan pada matriks interval.

BAB IV Analisis Dan Pembahasan

Bab ini berisikan tentang pembahasan penelitian yang didukung dengan literatur yang telah ada.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan tentang kesimpulan dari seluruh pembahasan pada bab-bab sebelumnya dan saran yang berkaitan dengan kajian ini.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab II ini membahas teori-teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun teori-teori pendukung tersebut antara lain adalah operasi pada matriks, determinan, invers matriks, interval, operasi aritmatika pada interval dan matriks interval.

2.1 Operasi pada Matriks

Matriks memiliki operasi aritmatika untuk menyelesaikan persoalan pada matriks tersebut. Operasi aritmatika pada matriks dapat berupa penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian/invers. Pada bagian ini akan dijelaskan tentang operasi aritmatika tersebut.

2.1.1 Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Definisi 2.1 (Anton. H, 1998): Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Contoh 2.1 :

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

Tentukan penjumlahan $A + B$!

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 5 & 8 & 9 \\ 13 & 5 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Menurut Anton. H (1998), jika B adalah sebarang matriks, maka $-B$ akan menyatakan hasil kali dari $(-1)B$. Jika A dan B adalah dua matriks yang ukurannya sama, maka $A - B$ didefinisikan sebagai jumlah $A + (-B) = A + (-1)B$.

Contoh 2.2 :

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

Tentukan penjumlahan $A + (-B)$!

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi di atas maka:

$$(-B) = (-1)\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & -8 \\ -7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C &= A + (-B) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & -8 \\ -7 & -3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -7 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.2 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.2 (Anton. H, 1998): Jika A suatu matriks dan α suatu skalar, maka hasil kali αA adalah matriks yang yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh α.

Contoh 2.3 :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ dan skalar $\alpha = 5$, tentukanlah αA!

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi, maka:

$$\alpha A = 5\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 20 & 15 & 5 \\ 30 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

2.1.3 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.3 (Anton. H, 1998): Jika A adalah sebuah matriks $m \times r$ dan B adalah sebuah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari emtri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kali yang dihasilkan.

Definisi perkalian matriks mensyaratkan bahwa jumlah kolom pada matriks A sama dengan jumlah baris pada matriks B untuk membentuk hasil kali AB.

Secara aljabar perkalian dua buah matriks didefinisikan sebagai berikut:

Jika diketahui matriks :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & \dots & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

maka:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ . & \dots & . \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ . & \dots & . & \dots & . \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Contoh 2.4 :

Diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 15 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$, tentukanlah hasil perkalian AB.?

Penyelesaian:

Oleh karena A adalah matriks 3×3 dan B adalah matriks 3×1 maka hasilkali $AB = C$ adalah 3×1, maka didapatkan:

$$\begin{aligned} C &= AB \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2) + 4 + 48 \\ 6 + 4 + 42 \\ 2 + 8 + 90 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 50 \\ 52 \\ 100 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.2 Determinan

Subbab ini akan membahas tentang determinan matriks dan beberapa sifat yang berlaku pada determinan.

Definisi 2.4 (Anton. H, 1998): Misalkan A adalah matriks $n \times n$, fungsi determinan dinyatakan dengan det, dan kita definisikan $\det(A)$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $|A|$.

Sifat-sifat yang berlaku pada determinan matriks antara lain yaitu:

1) Jika A sebarang matriks $n \times n$ yang mengandung satu baris bilangan $nol(0)$, maka $\det(A) = 0$.

2) Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$, maka det(A) adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utama yaitu $det\ A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

3) Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$, maka $\det(A)$ $=\det(A^t)$.

4) Jika terdapat dua atau lebih baris dari matriks A berukuran $n \times n$, maka $\det(A) = 0$.

5) Jika A dan B matriks $n \times n$ yang berukuran sama, maka $\det(AB)$ $=\det(A)\det(B)$.

6) Sebuah matriks A $n \times n$ dapat dibalik (invertible), maka $\det(A) \neq 0$.

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan determinan matriks, salah satunya yaitu metode ekspansi kofaktor.

Definisi 2.5 (Anton. H, 1998): Jika A adalah matriks $n \times n$, maka minor entri a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan dengan C_{ij} yang dinamakan dengan kofaktor entri a_{ij}.

Kofaktor dan minor elemen a_{ij} hanya berbeda dalam tandanya, yakni $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Cara yang lebih baik untuk menentukan tanda yang menghubungkan C_{ij} dan M_{ij} berada pada baris ke-i dan kolom ke-j dari susunan berikut:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Berdasarkan matriks tanda di atas, maka didapatkan kofaktor:

$$C_{11} = M_{11}, C_{21} = -M_{21}, C_{43} = -M_{43}, \dots , C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

maka secara matematis determinan matriks A dengan ordo $n \times n$ dapat dihitung dengan ekspansi kofaktor ditulis sebagai berikut :

$$\det(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right| \text{ atau } |A| = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\,C_{ij}.$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan matriks 3×3 berikut:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

diperoleh :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \dots, C_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama maka diperoleh determinan dari matriks $A_{3\times3}$ adalah:

$$\begin{aligned} \det(A_{3\times3}) &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &\quad a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{32}). \end{aligned}$$

2.3 Invers Matriks

Setelah mempelajari tentang determinan matriks dan tentang kofaktor, selanjutnya akan dipelajari tentang invers matriks yang juga menggunakan determinan dan kofaktor dalam penyelesaiannya.

Definisi 2.6 (Anton. H, 1998): Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor a_{ij}, maka matriks $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$ dinamakan matriks kofaktor A. Transpos matriks ini dinamakan adjoin A dan dinyatakan dengan $\mathrm{adj}(A)$.

Teorema 2.1 (Anton. H, 1998): Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A).$$

Bukti:

Misalkan diketahui matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka adjoin matriks A adalah:

$$\text{adj}(A) = C_{ij}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pertama-tama akan ditunjukkan dahulu:

$$A \ \text{adj}(A) = \det(A)\, I$$

maka:

$$A \ \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

akan didapatkan entri dalam baris ke-i dan kolom ke-j adalah:

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}. \qquad (2.1)$$

Jika $i = j$, maka persamaan (2.2) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke-i dari matriks A. Sebaliknya, jika $i \neq j$ maka koefisien-koefisien a_{in} dan kofaktor-kofaktor C_{jn} berasal dari baris-baris yang berbeda, sehingga persamaan (2.2) sama dengan nol, maka:

$$A \ \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I \qquad (2.2)$$

Oleh karena matriks A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$, maka persamaan (2.2) dapat dikalikan dengan $\frac{1}{\det(A)}$, maka:

$$\frac{1}{\det(A)}[A \ \text{adj}(A)] = I$$

$$A\left[\frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A)\right] = I$$

Selanjutnya kalikan kedua ruas dengan A^{-1} akan menghasilkan:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ \mathrm{adj}(A).$$

maka teorema 2.1 terbukti. ■

2.4 Interval

Menurut Ioana (2010), sebuah interval x didefinisikan sebagai:

$$\tilde{x} = [\underline{x}, \overline{x}] := \{\tilde{x} \in \mathbb{R} | \underline{x} \leq \tilde{x} \leq \overline{x}\}\ ,\quad \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R} \text{ dan } \underline{x} \leq \overline{x}.$$

Berdasarkan definisi di atas, dapat dilihat bahwa sebuah interval x adalah interval tertutup dan terbatas yang terdiri dari dua buah anggota yaitu $\underline{x}$ dan $\overline{x}$ yang merupakan anggota bilangan real. Dimana $\underline{x}$ harus lebih kecil dari pada $\overline{x}$, karena $\underline{x}$ merupakan batas bawah dan $\overline{x}$ merupakan batas atas dari interval x.

Contoh 2.5 :

Diberikan bilangan interval sebagai berikut:

$$\tilde{a} = [-4{,}6],\quad \tilde{b} = [8, -3]\ ,\quad \tilde{c} = [-4, -6],\quad \tilde{d} = [-7, -3].$$

Tentukanlah, mana yang merupakan interval dan mana yang bukan interval sesuai dengan definisi!

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi, maka terlihat bahwa $\tilde{a}$ dan $\tilde{d}$ merupakan interval, sedangkan $\tilde{b}$ dan $\tilde{c}$ bukan merupakan interval karena tidak memenuhi syarat sebuah interval $(\underline{x} \leq \overline{x})$.

2.5 Operasi Aritmatika pada Interval

Operasi aritmatika dalam bilangan interval diantaranya yaitu operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Simbol yang digunakan pada operasi aritmatika interval sama seperti operasi pada bilangan riil.

Definisi 2.7 (Ganesan, 2007): Untuk $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dalam IR dan untuk   {+, −, ×, ÷}, kita definisikan sebagai:

$$\tilde{a} * \tilde{b} = [\mathrm{m}(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) - k, \mathrm{m}(\tilde{a}) * m(\tilde{b}) + k]$$

dengan:

$$\mathrm{m}(\tilde{a}) = \left(\frac{\underline{a} + \overline{a}}{2}\right) \quad (2.3)$$

$$\mathrm{w}(\tilde{a}) = \frac{\overline{a} - \underline{a}}{2}$$

$$k = \min\left\{\left(\mathrm{m}(\tilde{a}) * m(\tilde{b})\right) - \alpha, \beta - \left(\mathrm{m}(\tilde{a}) * m(\tilde{b})\right)\right\}.$$

Untuk lebih jelasnya, maka berikut ini adalah ketentuan dalam operasi aritmatik dalam interval:

(i) Penjumlahan:

$$\tilde{a} + \tilde{b} = [\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}]$$

$$= \left[\left(\mathrm{m}(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) - k, \left(\mathrm{m}(\tilde{a}) + m(\tilde{b})\right) + k\right] \quad (2.4)$$

dengan:

$$k = \left(\frac{(\overline{b} + \overline{a}) - (\underline{b} + \underline{a})}{2}\right) \quad (2.5)$$

(ii) Pengurangan

$$\tilde{a} - \tilde{b} = [\underline{a}, \overline{a}] - [\underline{b}, \overline{b}]$$

$$= \left[\left(\mathrm{m}(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) - k, \left(\mathrm{m}(\tilde{a}) - m(\tilde{b})\right) + k\right] \quad (2.6)$$

dengan:

$$k = \left(\frac{(\overline{b} + \overline{a}) - (\underline{b} + \underline{a})}{2}\right) \quad (2.7)$$

(iii) Perkalian

$$\tilde{a}\tilde{b} = [\underline{a}, \overline{a}][\underline{b}, \overline{b}]$$

$$= \left[\left(\mathrm{m}(\tilde{a})m(\tilde{b})\right) - k, \left(\mathrm{m}(\tilde{a})m(\tilde{b})\right) + k\right] \quad (2.8)$$

dengan:

$$k = \min\left\{\left(m(\tilde{a})m(\tilde{b})\right) - \alpha, \beta - \left(m(\tilde{a})m(\tilde{b})\right)\right\} \tag{2.9}$$

$$\alpha = \min\left(\underline{a}\,\underline{b}\,, \underline{a}\overline{b}\,, \overline{a}\underline{b}\,, \overline{a}\,\overline{b}\right) \tag{2.10}$$

$$\beta = \max\left(\underline{a}\,\underline{b}\,, \underline{a}\overline{b}\,, \overline{a}\underline{b}\,, \overline{a}\,\overline{b}\right) \tag{2.11}$$

Jika terdapat perkalian skalar dengan interval $(\lambda\tilde{a})$, maka:

$$\lambda\tilde{a} = \begin{cases} [\lambda\underline{a}, \lambda\overline{a}], \text{untuk } \lambda \geq 0 \\ [\lambda\overline{a}, \lambda\underline{a}], \text{untuk } \lambda < 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

(iv) Pembagian/invers

$$\frac{1}{\tilde{x}} = \tilde{x}^{-1} = \underline{x}, \overline{x}]^{-1} = \left[\frac{1}{m(\tilde{x})} - k\,, \frac{1}{m(\tilde{x})} + k\right] \tag{2.13}$$

dengan :

$$k = min\left\{\frac{1}{x_2}\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}\right), \frac{1}{x_1}\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_2}\right)\right\} \text{ dan } 0 \,\square\, \underline{x}\,, \overline{x}] \tag{2.14}$$

Contoh 2.6 :

Diberikan $\tilde{a} = [-1,2]$, $\tilde{b} = [3,5]$ dan $\lambda = 5$, tentukanlah hasil dari $(\tilde{a} + \tilde{b})$, $(\tilde{a} - \tilde{b})$, $(\tilde{a}\tilde{b})$, $(\lambda\tilde{b})$ dan $\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right)$!

Penyelesaian:

Sebelum melakukan perhitungan, perlu dicari:

$$m(\tilde{a}) = \frac{(-1) + 2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{dan} \quad m(\tilde{b}) = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

Selanjutnya, lakukan operasi aritmatikanya:

(i) $(\tilde{a} + \tilde{b})$ dan $(\tilde{a} - \tilde{b})$

Pertama harus ditentukan nilai k sebagai berikut:

$$k = \left(\frac{(5 + 2) - \left(3 + (-1)\right)}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

maka:

$$(\tilde{a} + \tilde{b}) = [-1,2] + [3,5]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}+4\right)-\frac{5}{2}\ ,\left(\frac{1}{2}+4\right)+\frac{5}{2}\right] = [2,7]$$

$$(\tilde{a}-\tilde{b}) = [-1,2]-[3,5]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}-4\right)-\frac{5}{2}\ ,\left(\frac{1}{2}-4\right)+\frac{5}{2}\right] = [-6,-1]$$

(ii) $(\tilde{a}\tilde{b})$ dan $(\lambda\tilde{b})$

Sebelum dilakukan perkalian $\tilde{a}\tilde{b}$ perlu ditentukan dahulu:

$$\alpha = \min\big((-1)3\,,(-1)5\,,(2)3\,,(2)5\big) = -5$$

$$\beta = \max\big((-1)3\,,(-1)5\,,(2)3\,,(2)5\big) = 10$$

$$k = \min\left\{\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)4\right)-(-5), 10-\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)4\right)\right\} = 7$$

maka:

$$(\tilde{a}\tilde{b}) = \left[\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)4\right)-7, \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)4\right)+7\right]$$

$$= [-5,9].$$

Selanjutnya $\lambda\tilde{b}$, oleh karena $\lambda \geq 0$, maka:

$$(\lambda\tilde{b}) = [(5)3\,,(5)5] = [15,25].$$

(iii) $\left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right) = \tilde{a}\tilde{b}^{-1}$

Untuk menentukan $\tilde{b}^{-1}$:

$$\tilde{b}^{-1} = \frac{1}{[3,5]}$$

$$k = \min\left\{\frac{1}{5}\left(\frac{5-3}{3+5}\right), \frac{1}{3}\left(\frac{5-3}{3+5}\right)\right\}$$

$$= \min(0.05\,,0.083)$$

$$= 0.05$$

maka:

$$\tilde{b}^{-1} = \left[\frac{1}{4} - 0.05\,, \frac{1}{4} + 0.05\right]$$

$$= [0.2\,, 0.3]$$

Setelah $\tilde{b}^{-1}$ didapatkan, selanjutnya menentukan $\tilde{a}\tilde{b}^{-1}$ sebagai berikut:

$$\tilde{a}\tilde{b}^{-1} = [-1\,, 2][0.2\,, 0.3]$$

sebelumnya harus ditentukan dahulu:

$$\alpha = \min\big((-1)(0.2)\,, (-1)(0.3)\,, (2)(0.2)\,, (2)(0.3)\big) = -0.3$$

$$\beta = \max\big((-1)(0.2)\,, (-1)(0.3)\,, (2)(0.2)\,, (2)(0.3)\big) = 0.6$$

$$k = \min\left\{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) - (-0.3)\,, 0.6 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$= \min(0.425\,, 0.475) = 0.425$$

maka:

$$\tilde{a}\tilde{b}^{-1} = [-1\,, 2][0.2\,, 0.3]$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) - 0.425\,, \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) + 0.425\right]$$

$$= [-0.3\,, 0.55]$$

2.6 Matriks Interval

Penjelasan dari matriks interval sebenarnya sama seperti matriks biasa, dari awal telah dijelaskan perbedaannya hanya terletak pada elemennya saja, yaitu berupa interval. Definisi matriks interval secara jelas adalah sebagai berikut:

Definisi 2.8 (Rohn. J, 2005): Jika $\underline{A}, \overline{A}$ adalah dua buah matriks dalam $\mathbb{R}^{m \times n}$, dengan $\underline{A} \leq \overline{A}$ yang merupakan bagian dari sebuah matriks: $\tilde{A} = [\underline{A}, \overline{A}] = \{\tilde{A}\,;\, \underline{A} \leq \tilde{A} \leq \overline{A}\}$. Ini disebut matriks interval, dan matriks $\underline{A}, \overline{A}$ adalah matriks terbatas.

Misalkan diberikan dua buah matriks B dan C sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

maka matriks $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [b_{11}, c_{11}] & [b_{12}, c_{12}] & \dots & [b_{1n}, c_{1n}] \\ [b_{21}, c_{21}] & [b_{22}, c_{22}] & \dots & [b_{2n}, c_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [b_{m1}, c_{m1}] & [b_{m2}, c_{m2}] & \dots & [b_{mn}, c_{mn}] \end{bmatrix} \quad \text{dengan } b_{ij} \leq c_{ij},$$

$i = 1,2, , \dots , n$ dan $j = 1,2, \dots , m$.

Selanjutnya kita misalkan: $b_{ij} = \underline{a}_{ij}$ dan $c_{ij} = \overline{a}_{ij}$, maka matriks interval $\tilde{A}$ dapat ditulis sebagai:

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{a}_{i1} & \tilde{a}_{i2} & \dots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{mn} \end{bmatrix} = \tilde{a}_{ij}]_{m \times n}$$

dengan $\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij}$, dengan $\tilde{a}_{ij} = \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$.

Simbol 0 digunakan sebagai lambang dari matriks nol $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$, sedangkan dalam matriks interval, matriks nol disimbolkan dengan $\tilde{0}$ yaitu matriks interval yang elemennya nol:

$$\tilde{0} = \begin{bmatrix} \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{0} & \dots & \tilde{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0,0] & \dots & [0,0] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,0] & \dots & [0,0] \end{bmatrix}.$$

Matriks identitas pada matriks interval disimbolkan dengan $\tilde{I}$ yang didefinisikan sebagai:

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} \tilde{1} & \dots & \tilde{0} \\ \vdots & \tilde{1} & \vdots \\ \tilde{0} & \dots & \tilde{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1,1] & \dots & [0,0] \\ \vdots & [1,1] & \vdots \\ [0,0] & \dots & [1,1] \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.7 :

Diberikan dua buah matriks X dan Y sebagai berikut:

$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 5 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 8 \\ 7 & 7 & 6 \\ 16 & -3 & 13 \end{bmatrix}$ susunanlah matriks $\tilde{A}$ yaitu matriks interval dari matriks X dan Y!

Penyelesaian:

Oleh karena $x_{ij} \leq y_{ij}$, maka berdasarkan definisi 2.8 matriks interval $\tilde{A}$ dapat disusun sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [2,5] & [0,9] & [1,8] \\ [6,7] & [7,7] & [3,6] \\ [5,16] & [-5,-3] & [2,13] \end{bmatrix}.$$

2.6.1 Nilai Tengah dan Jarak pada Matriks Interval

Sebuah matriks interval mempunyai nilai tengah dari elemen-elemen intervalnya yang dapat didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{m}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{m1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}.$$

dengan:

$$\mathrm{m}(\tilde{a}_{mn}) = \mathrm{m}(\underline{a}, \overline{a})_{mn} = \frac{\underline{a} + \overline{a}}{2}.$$

Selanjutnya, jarak dari sebuah interval matriks didefinisikan sebagai:

$$\mathrm{w}(\tilde{A}) = \begin{bmatrix} \mathrm{w}(\tilde{a}_{11}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}(\tilde{a}_{m1}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{mn}) \end{bmatrix}.$$

dengan:

$$\mathrm{w}(\tilde{a}_{11}) = \mathrm{w}(\underline{a}, \overline{a})_{mn} = \frac{\overline{a} - \underline{a}}{2}.$$

Ganesan (2007) dalam jurnalnya menyatakan bahwa:

i. Jika $\mathrm{m}(\tilde{A}) = \mathrm{m}(\tilde{B})$ dan $\mathrm{w}(\tilde{A}) = \mathrm{w}(\tilde{B})$ maka matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dapat dikatakan sama dan dapat ditulis dengan $\tilde{A} = \tilde{B}$. Jika $\mathrm{m}(\tilde{A}) = \mathrm{m}(\tilde{B})$ sedangkan $\mathrm{w}(\tilde{A}) \neq \mathrm{w}(\tilde{B})$ maka matriks interval $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dapat dikatakan ekuivalen dan dapat ditulis dengan $\tilde{A} \approx \tilde{B}$.

ii. Jika $\mathrm{m}(\tilde{A}) = \tilde{I}$ dan $\mathrm{w}(\tilde{A}) = \tilde{0}$ maka matriks $\tilde{A}$ dapat dikatakan sebagai identitas matriks interval dan dapat ditulis sebagai:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [1,1] & \dots & [0,0] \\ \vdots & [1,1] & \vdots \\ [0,0] & \dots & [1,1] \end{bmatrix} = \tilde{I}.$$

Jika $\mathrm{m}(\tilde{A}) = \tilde{I}$ sedangkan $\mathrm{w}(\tilde{A}) \neq \tilde{0}$ maka matriks interval $\tilde{A}$ dapat dikatakan ekuivalen dengan matriks identitas dan dapat ditulis sebagai:

$$\tilde{A} \approx \begin{bmatrix} [1,1] & \dots & [0,0] \\ \vdots & [1,1] & \vdots \\ [0,0] & \dots & [1,1] \end{bmatrix} \approx \tilde{I}.$$

Proposisi 2.1 (Ganesan, 2007): Jika $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathrm{IR}^{n\times n}$ maka:

(i) $\mathrm{m}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \mathrm{m}(\tilde{A}) + \mathrm{m}(\tilde{B})$ dan $\mathrm{w}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \mathrm{w}(\tilde{A}) + \mathrm{w}(\tilde{B})$

(ii) $\mathrm{m}(\tilde{A}-\tilde{B}) = \mathrm{m}(\tilde{A}) - \mathrm{m}(\tilde{B})$ dan $\mathrm{w}(\tilde{A}-\tilde{B}) = \mathrm{w}(\tilde{A}) + \mathrm{w}(\tilde{B})$

(iii) $\mathrm{m}(\tilde{A}\tilde{B}) = \mathrm{m}(\tilde{A})\mathrm{m}(\tilde{B})$

Pembuktian:

(i) $\mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{B}})$ **dan** $\mathbf{w}(\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{w}(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \mathbf{w}(\tilde{\boldsymbol{B}})$

Diberikan matriks interval:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \cdots & \tilde{b}_{nn} \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $\mathrm{m}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \mathrm{m}(\tilde{A}) + \mathrm{m}(\tilde{B})$ dan $\mathrm{w}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \mathrm{w}(\tilde{A}) + \mathrm{w}(\tilde{B})$!

Bukti:

$$\mathrm{m}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}+\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}+\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}+\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn}+\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11})+\mathrm{m}(\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n})+\mathrm{m}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1})+\mathrm{m}(\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn})+\mathrm{m}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{m}(\tilde{A}) + \mathrm{m}(\tilde{B})$$

$$\mathrm{w}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \begin{bmatrix} \mathrm{w}(\tilde{a}_{11}+\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{1n}+\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}(\tilde{a}_{n1}+\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{nn}+\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{w}(\tilde{a}_{11})+\mathrm{w}(\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{1n})+\mathrm{w}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}(\tilde{a}_{n1})+\mathrm{w}(\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{nn})+\mathrm{w}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} w(\tilde{a}_{11}) & \dots & w(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{a}_{n1}) & \dots & w(\tilde{a}_{nn}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(\tilde{b}_{11}) & \dots & w(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w(\tilde{b}_{n1}) & \dots & w(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{w}(\tilde{A}) + \mathrm{w}(\tilde{B}).$$

Berdasarkan pembuktian di atas maka benar bahwa:

$\mathrm{m}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \mathrm{m}(\tilde{A}) + \mathrm{m}(\tilde{B})$ dan $\mathrm{w}(\tilde{A}+\tilde{B}) = \mathrm{w}(\tilde{A}) + \mathrm{w}(\tilde{B})$. ■

(ii) $\mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{A}}-\tilde{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{A}}) - \mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{B}})$ **dan** $\mathbf{w}(\tilde{\boldsymbol{A}}-\tilde{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{w}(\tilde{\boldsymbol{A}}) + \mathbf{w}(\tilde{\boldsymbol{B}})$

Diberikan matriks interval:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \cdots & \tilde{b}_{nn} \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $\mathrm{m}(\tilde{A}-\tilde{B}) = \mathrm{m}(\tilde{A}) - \mathrm{m}(\tilde{B})$ dan $\mathrm{w}(\tilde{A}-\tilde{B}) = \mathrm{w}(\tilde{A}) + \mathrm{w}(\tilde{B})$!

Bukti:

$$\mathrm{m}(\tilde{A}-\tilde{B}) = \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}-\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}-\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}-\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn}-\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11})-\mathrm{m}(\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n})-\mathrm{m}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1})-\mathrm{m}(\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn})-\mathrm{m}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{m}(\tilde{A}) - \mathrm{m}(\tilde{B}).$$

$$\mathrm{w}(\tilde{A}-\tilde{B}) = \begin{bmatrix} \mathrm{w}(\tilde{a}_{11}-\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{1n}-\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}(\tilde{a}_{n1}-\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{nn}-\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

oleh karena:

$$\tilde{a}_{11}-\tilde{b}_{11} = \left[\left(\left(\frac{(\underline{a}+\overline{a})}{2}-\frac{(\underline{b}+\overline{b})}{2}\right)-\left(\frac{(\overline{b}+\overline{a})-(\underline{b}+\underline{a})}{2}\right)\right),\right.$$

$$\left.\left(\left(\frac{(\underline{a}+\overline{a})}{2}-\frac{(\underline{b}+\overline{b})}{2}\right)+\left(\frac{(\overline{b}+\overline{a})-(\underline{b}+\underline{a})}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{\underline{a}+\overline{a}-\underline{b}-\overline{b}-\overline{b}-\overline{a}+\underline{b}+\underline{a}}{2}\right),\left(\frac{\underline{a}+\overline{a}-\underline{b}-\overline{b}+\overline{b}+\overline{a}-\underline{b}-\underline{a}}{2}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{2(\underline{a}-\overline{b})}{2},\frac{2(\overline{a}-\underline{b})}{2}\right]$$

$$= [(\underline{a}-\overline{b}),(\overline{a}-\underline{b})]$$

maka:

$$\mathrm{w}(\tilde{a}_{11}-\tilde{b}_{11}) = \mathrm{w}[(\underline{a}-\overline{b}),(\overline{a}-\underline{b})]$$

$$= \frac{(\overline{a}-\underline{b})-(\underline{a}-\overline{b})}{2}$$

$$= \frac{(\overline{a} - \underline{a})}{2} - \frac{(\underline{b} - \overline{b})}{2}$$

$$= \frac{(\overline{a} - \underline{a})}{2} + \frac{(\overline{b} - \underline{b})}{2}$$

$$= w(\tilde{a}) + w(\tilde{b})$$

Jadi:

$$\mathrm{w}(\tilde{A} - \tilde{B}) = \begin{bmatrix} \mathrm{w}(\tilde{a}_{11}) + \mathrm{w}(\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{1n}) + \mathrm{w}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}(\tilde{a}_{n1}) + \mathrm{w}(\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{nn}) + \mathrm{w}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{w}(\tilde{a}_{11}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}(\tilde{a}_{n1}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{a}_{nn}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{w}(\tilde{b}_{11}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{w}(\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{w}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{w}(\tilde{A}) + \mathrm{w}(\tilde{B}). \qquad \blacksquare$$

(iii) $\mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{A}})\mathbf{m}(\tilde{\boldsymbol{B}})$

Diberikan matriks interval:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \cdots & \tilde{b}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \cdots & \tilde{b}_{nn} \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan $\mathrm{m}(\tilde{A}\tilde{B}) = \mathrm{m}(\tilde{A})\mathrm{m}(\tilde{B})$!

Bukti:

Berdasarkan pada persamaan 4.8, maka:

$$\tilde{A}\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}\tilde{b}_{11} + \cdots + \tilde{a}_{1n}\tilde{b}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{11}\tilde{b}_{1n} + \cdots + \tilde{a}_{1n}\tilde{b}_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1}\tilde{b}_{11} + \cdots + \tilde{a}_{nn}\tilde{b}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{n1}\tilde{b}_{1n} + \cdots + \tilde{a}_{nn}\tilde{b}_{nn} \end{bmatrix}$$

maka:

$$\mathrm{m}(\tilde{A}\tilde{B}) = \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}\tilde{b}_{11} + \cdots + \tilde{a}_{1n}\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}\tilde{b}_{1n} + \cdots + \tilde{a}_{1n}\tilde{b}_{nn}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}\tilde{b}_{11} + \cdots + \tilde{a}_{nn}\tilde{b}_{n1}) & \dots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}\tilde{b}_{1n} + \cdots + \tilde{a}_{nn}\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}\tilde{b}_{11}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}\tilde{b}_{n1}) & \ldots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}\tilde{b}_{1n}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}\tilde{b}_{nn}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}\tilde{b}_{11}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn}\tilde{b}_{n1}) & \ldots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}\tilde{b}_{1n}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn}\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11})\mathrm{m}(\tilde{b}_{11}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n})\mathrm{m}(\tilde{b}_{n1}) & \ldots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{11})\mathrm{m}(\tilde{b}_{1n}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n})\mathrm{m}(\tilde{b}_{nn}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1})\mathrm{m}(\tilde{b}_{11}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn})\mathrm{m}(\tilde{b}_{n1}) & \ldots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1})\mathrm{m}(\tilde{b}_{1n}) + \cdots + \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn})\mathrm{m}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{a}_{11}) & \ldots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{a}_{n1}) & \ldots & \mathrm{m}(\tilde{a}_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{m}(\tilde{b}_{11}) & \ldots & \mathrm{m}(\tilde{b}_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{m}(\tilde{b}_{n1}) & \cdots & \mathrm{m}(\tilde{b}_{nn}) \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{m}(\tilde{A})\mathrm{m}(\tilde{B}). \qquad \blacksquare$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini penulis menggunakan metode kajian pustaka (studi literatur), yaitu penelitian yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruang perpustakaan, seperti: buku, jurnal, dokumentasi, dan juga internet.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menyusun matriks interval $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$, vektor interval $(\tilde{x})$ dan skalar interval $(\tilde{\lambda})$.
2. Membuktikan sifat-sifat operasi aritmatika pada matriks interval yaitu:
   a. Berlaku atau tidaknya sifat komutatif terhadap operasi penjumlahan.
   b. Berlaku atau tidaknya sifat asosiatif terhadap operasi penjumlahan.
   c. Berlaku atau tidaknya sifat komutatif terhadap operasi perkalian.
   d. Berlaku atau tidaknya sifat asosiatif terhadap operasi perkalian.
   e. Berlaku atau tidaknya sifat distributif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.
   f. Berlaku atau tidaknya sifat komutatif skalar terhadap operasi perkalian.
3. Menentukan langkah-langkah untuk mencari determinan pada matriks interval dengan metode ekspansi kofaktor dan membuktikan beberapa sifat determinan matriks interval.
4. Menentukan langkah-langkah untuk mencari nilai invers pada matriks interval dengan metode adjoin dan membuktikan beberapa sifat invers matriks interval.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, maka dapat diambil kesimpulan:

1. Sifat operasi aritmatika pada matriks biasa yang juga berlaku pada matriks interval yaitu sifat komutatif terhadap penjumlahan $\left(\tilde{A} + \tilde{B} = \tilde{B} + \tilde{A}\right)$ dan sifat asosiatif terhadap penjumlahan $\left(\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) + \tilde{C} = \tilde{A} + \left(\tilde{B} + \tilde{C}\right)\right)$.
2. Sifat operasi aritmatika pada matriks biasa yang tidak berlaku pada matriks interval diantaranya yaitu sifat komutatif terhadap perkalian $\left(\tilde{A}\tilde{B} \neq \tilde{B}\tilde{A}\right)$, sifat asosiatif terhadap perkalian $\left(\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\tilde{C} \neq \tilde{A}\left(\tilde{B}\tilde{C}\right)\right)$, sifat distributif $\left(\tilde{A}\left(\tilde{B} \pm \tilde{C}\right) \neq \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{A}\tilde{C}\right)$ dan sifat komutatif skalar $\left(\tilde{\lambda}\left(\tilde{A}\mathrm{x}\right) \neq \tilde{A}\left(\tilde{\lambda}\mathrm{x}\right)\right)$.
3. Langkah-langkah dalam menentukan nilai determinan pada matriks interval dengan metode ekspansi kofaktor sama halnya seperti pada matriks biasa, perbedaannya hanya terletak pada operasi matriks interval menggunakan operasi aritmatika pada interval. Sifat determinan yang berlaku pada matriks biasa ternyata tidak berlaku pada sifat determinan matriks interval diantaranya adalah:
   (i) $\det\left(\tilde{A}\right) \neq \left[\det\left(\underline{A}\right), \det\left(\overline{A}\right)\right]$
   (ii) $\det\left(\tilde{A}\tilde{B}\right) \neq \det\left(\tilde{A}\right)\det\left(\tilde{B}\right)$
4. Langkah-langkah menentukan invers pada matriks interval dengan menggunakan adjoin sama halnya seperti pada matriks biasa, perbedaannya hanya terletak pada operasi matriks interval menggunakan operasi aritmatika pada interval. Dan salah satu sifat invers matriks interval yang dapat penulis buktikan adalah $\left(\tilde{A}\right)^{-1} \neq \left[\left(\underline{A}\right)^{-1}, \left(\overline{A}\right)^{-1}\right]$.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang sifat-sifat opeasi aritmatika, determinan dan invers pada matriks interval. Bagi pembaca yang tertarik tentang matriks interval ini, maka disarankan untuk membahas dan mengembangkan lebih lanjut tentang matriks interval, serta membahas tentang aplikasi matriks interval ini, karena didalam tugas akhir ini hanya dibahas tentang dasar-dasar dari matriks interval.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta : Erlangga. 1998.

Ioana, Pasca. *Formally Verified Conditions for Regularity of Interval Matrices.* 2010. [Online] Available : *http*://hal.inria.fr/inria-00464937/en/. diakses 23 Maret 2012

K. Ganesan. On Some Properties of Interval Matrices. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. Vol. 1(2), halaman 92-99. 2007.

Nirmala. T, dkk. Inverse Interval Matrix: A New Approach. *Applied Mathematical Sciences,* Vol. 5(13), halaman 607 – 624. 2011.

Rejeki, Sri Puri Wahyu Pramesthi. *Analisis Sistem Jaringan Antrean dengan Elemen-Elemen Matriks Adjasen berupa Interval dalam Aljabar max-Plus.* Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. 2010.

Rex, Georg and Jiri Rohn. Sufficient Conditions For Regularity And Singularity Of Interval Matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. Vol. 20, halaman 437-445. 1998.

Rohn, Jiri. *A Handbook of Results on Interval Linear Problems.* Czech Academy of *Sciences* Prague, Czech Republic, European Union. 2005.

Safitri, Devi. *Menentukan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Interval.* Tugas *Akhir* Mahasiswa UIN SUSKA RIAU. 2008.